



ΤΑΞΗ : Β'
ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2006

ΜΑΘΗΜΑ
ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Μακάριος Θεόδωρος- Σοφianoπούλου Ανθούλα

1ο ΘΕΜΑ

A. α. Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.
(Μονάδες 5)

β. Αν $\vec{\alpha}=(\chi_1,\psi_1)$ $\vec{\beta}=(\chi_2,\psi_2)$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα να εκφράσετε το εσωτερικό γινόμενο τους ως συνάρτηση των συντεταγμένων τους (απόδειξη).
(Μονάδες 10)

B. Να διατυπώσετε ΣΩΣΤΑ τις παρακάτω λανθασμένες προτάσεις:

1. Αν $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο αντίρροπα διανύσματα του επιπέδου τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|$

2. Αν $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ είναι η ορίζουσα δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τότε ισχύει

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \neq 0$$

3. Όταν η εκκεντρότητα ϵ της έλλειψης C τείνει στο 1 τότε η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος.

4. Η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, όπου $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$, έχει ασύμπτωτες τις $y = \frac{\alpha}{\beta}x$ και $y = -\frac{\alpha}{\beta}x$.

5. Η εκκεντρότητα της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ είναι $\epsilon < 1$.

(Μονάδες 10)

2ο ΘΕΜΑ

Δίνονται τα σημεία A (1, 3), B (3, - 3) και Γ(0,2).

α) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

(Μονάδες 6)

β) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ΓΜ.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές την αρχή των αξόνων και τα σημεία Γ και Μ.

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο Α και ακτίνα την απόσταση του Α από την ευθεία ΓΜ.

(Μονάδες 7)

3ο ΘΕΜΑ

Έστω α ακέραιος.

- A.** Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\beta = \frac{5\alpha+2}{3}$ είναι ακέραιος μόνο όταν ο α έχει την μορφή $\alpha=3\kappa+2, \kappa \in \mathbb{Z}$ (Μονάδες 5)
- B.** Αν α και β είναι οι ακέραιοι του ερωτήματος Α τότε
- i)** Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $5\alpha-\beta$ δια του 10 είναι 6. (Μονάδες 5)
- ii)** Να αποδείξετε ο αριθμός $2\alpha+\beta+3$ διαιρείται με το 11. (Μονάδες 5)

4ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η εξίσωση $C_\lambda: x^2 + y^2 + 4\lambda x - 2(\lambda+2)y + 4\lambda + 4 = 0$ (1)

- α.** Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \neq 0$ η εξίσωση C_λ παριστάνει κύκλο. Τι συμβαίνει όταν $\lambda=0$; (Μονάδες 5)
- β.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία κινούνται τα κέντρα των κύκλων αυτών. (Μονάδες 5)
- γ.** Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι έχουν κοινή εφαπτομένη την ευθεία $y=2x+2$. (Μονάδες 5)
- δ.** Η κεραία ενός ραδιοφωνικού σταθμού σημειώνεται πάνω σε ένα χάρτη στο κέντρο του κύκλου C_λ με $\lambda=10$. Η εμβέλεια σε χιλιόμετρα του Ρ.Σ είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου αυτού. Ένα αυτοκίνητο κινείται και η θέση του πάνω στο χάρτη κάθε χρονική στιγμή t σημειώνεται με το σημείο $\Pi(t+1, 2t+4)$. Να αποδείξετε ότι ο οδηγός του αυτοκινήτου θα ακούσει το ραδ. σταθμό μόνο σε ένα σημείο της πορείας του. (Μονάδες 10)

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

ΟΙ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ

ΜΑΚΑΡΙΟΣ Θ.
ΣΟΦΙΑΝΟΠΟΥΛΟΥ ΑΝ.